# Poglavlje 1

# Integral

## 1.1 Neodređeni integral

**Definicija 1.1.1** *Neka je zadana funkcija* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$*: Funkcija* $F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *za koju je* $F'(x) = f(x)$ *za svaki* $x \in (a, b)$ *naziva se* ***primitivna funkcija*** *(antiderivacija) funkcije* $f$*.*

**Primjer** 1 Odredite neku primitivnu funkciju slijedećih funkcija:

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(c) $f(x) = 2^x$

(d) $f(x) = \frac{1}{x}$

(e) $f(x) = e^x$

(f) $f(x) = \sin x$

*Rješenje:*

(a) Tražimo neku funkciju koja derivirana daje $x^2$. Kako znamo da je $(x^3)' = 3x^2$, vidimo da je jedno rješenje $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Primjetimo da smo tom rješenju mogli dodati bilo koji konstantu jer $(const)' = 0$. Tako je rješenje i npr. $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2$.

(b) Znamo da je $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ pa je jedno od rješenja $F(x) = 2x^{\frac{1}{2}} + 1$.

(c) Npr. $F(x) = (\frac{1}{\ln 2})2^x + e$ jer $(2^x)' = (\ln 2)2^x$.

(d) $F(x) = \ln x$. Ovdje je rješenje npr. i $F(x) = \ln(2x)$ jer $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$ pa $(\ln(2x))' = (ln2 + \ln x)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

(e) $F(x) = e^x + 4$.

(f) $F(x) = -\cos x$.

**Definicija 1.1.2** *Za zadanu funkciju* $f(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *familija* $\{F(x)|F'(x) = f(x), x \in (a, b)\}$ *svih primitivnih funkcija te funkcije zove se* ***neodređeni integral*** *funkcije* $f$ *i označava se sa* $\int f(x)dx$*.*

**Primjer** 2 Odredite slijedeće neodređene integrale:

(a) $\int(x^2+x+1)dx$ (c) $\int\frac{dx}{x+2}$

(b) $\int(\sqrt{x}+\cos x)dx$ (d) $\int\frac{dx}{1+x^2}$

*Rješenje:*

(a) Tražimo, kao i prije, funkciju koja derivirana daje $x^2+x+1$ i znamo da možemo dodati proizvoljnu konstantu. Stoga je rješenje: $\int(x^2+x+1)dx = \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$ gdje je $C$ proizvoljna konstanta.

(b) $\int(\sqrt{x}+\cos x)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\sin x + C$

(c) $\int\frac{dx}{x+2} = \ln(|x+2|+C = \begin{cases} \ln(x+2)+C, & x>-2 \\ \ln(-(x+2))+C, & x<-2. \end{cases}$

(d) $\int\frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

**Osnovna svojstva integriranja**: iz definicije neodređenog integrala i svojstava derivacije lako se vidi da vrijede sljedeće formule:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$,

2) $\int(\lambda f(x)+\mu g(x))dx = \lambda\int f(x)dx+\mu\int g(x)dx$,

3) $\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(t)dt = F(t)+C$.

**Zadatak** 3 Provjerite da vrijede slijedeće jednakosti:

(a) $\int(\sqrt[3]{x})'dx = \sqrt[3]{x}+C$ (c) $\left(\int\frac{dx}{\cos^2 x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

(b) $\int(\cos^2 x)'dx = \cos^2 x + C$ (d) $\left(\int\frac{\sin x}{x}\,dx\right)' = \frac{\sin x}{x}$

*Rješenje:*

(a) Imamo: $\int(\sqrt[3]{x})'dx = \int\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{1}{3}\int x^{-\frac{2}{3}}dx = \sqrt[3]{x}+C.$

(c) Ovdje možemo koristiti definiciju neodređenog integrala i zaključak izvesti direktno ili računati:

$$\left(\int\frac{dx}{\cos^2 x}\right)' = (\tan x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

(d) Koristimo definiciju neodređenog integrala.

**Zadatak** 4 Vrijedi li jednakost: $\left(\int f(x)dx\right)' = \int f'(x)dx$ ?

*Rješenje:* Ne. Naime, $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ dok s druge strane imamo: $\int f'(x)dx = f(x)+C$. Uzmimo, npr. $f(x)=x$:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(\int xdx\right)' = (\frac{1}{2}x^2+C)' = x$$

i

$$\int f'(x)dx = \int(x)'dx = \int dx = x+C$$

pa, ako uzmemo $C \neq 0$ jednakost ne vrijedi.

**Zadatak** 5 Koristeći svojstva integriranja, nađite sljedeće integrale:

(a) $\int (2x^2+1)^3 dx$

(b) $\int (2x^2+1)^{46} x dx$

*Rješenje:*

(a) $\int (2x^2+1)^3 dx = \int (8x^6+12x^4+6x^2+1)dx = \frac{8}{7}x^7 + \frac{12}{5}x^5 + \frac{6}{3}x^3 + x + C,$

(b) $\int (2x^2+1)^{46} x dx = \int (2x^2+1)^{46} \frac{1}{4} d(2x^2+1) = \frac{1}{4}\int (2x^2+1)^{46} d(2x^2+1) = \frac{1}{4}\frac{(2x^2+1)^{47}}{47} + C = \frac{1}{188}(2x^2+1)^{47} + C$

*Napomena:* U zadatku (b) smo, ustvari, proveli zamjenu varijabli (vidi poglavlje Metoda supstitucije), $t = 2x^2+1$.

**Zadatak** 6 Nađite integrale:

(a) $\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2} dx$

(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

(c) $\int (1+\sqrt{x})^4 dx$

(d) $\int (1+\sqrt{x})^{27} dx$

*Rješenje:*

(b)

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} &= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2} dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{x+1} dx - \frac{1}{2}\int \sqrt{x-1} dx = \\
&= \frac{1}{2}\int \sqrt{x+1} d(x+1) - \frac{1}{2}\int \sqrt{x-1} d(x-1) = \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{1}{3}\sqrt{(x-1)^3} + C
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int (1+\sqrt{x})^4 dx &= \int (1+\sqrt{x})^4 \ 2\sqrt{x} \ d(1+\sqrt{x}) dx = 2\int (1+\sqrt{x})^4 \ (1+\sqrt{x}-1) d(1+\sqrt{x}) = \\
&= 2\int (1+\sqrt{x})^5 d(1+\sqrt{x}) - 2\int (1+\sqrt{x})^4 d(1+\sqrt{x}) = \\
&= 2\left[\frac{(1+\sqrt{x})^6}{6} - \frac{(1+\sqrt{x})^5}{5}\right] + C
\end{aligned}$$

(d) Slično kao (c).

*Napomena:* Zadatak (c) se može računati i direktno ali kod npr. (d) bi izravan račun bio puno teži pa ga zato izbjegavamo.

**Zadatak** 7 Nađite integrale:

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad a > 0$

(b) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$

(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$

(d) $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$

*Rješenje:*

(a)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

Ostali integrali rješavaju se analogno.

**Zadatak** 8 Nađite integrale:

(a) $\int 3^x e^x dx$

(b) $\int 7^x 3^{-x} dx$

(c) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$

*Rješenje:*

(a)

$$\begin{aligned}\int 3^x e^x dx &= \int e^{x \ln 3} e^x dx = \int e^{(1+\ln 3)x} dx = \\ &= \frac{1}{1+\ln 3} \int e^{(1+\ln 3)x} d((1+\ln 3)x) = \frac{e^{(1+\ln 3)x}}{1+\ln 3} + C\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx &= \int \left( 2\left(\frac{2}{10}\right)^x - \frac{1}{5}\left(\frac{5}{10}\right)^{x-1} \right) dx = 2\int \left(\frac{1}{5}\right)^x dx - \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} dx = \\ &= \ldots = \frac{1}{5\ln 2} 2^{-x+1} - \frac{2}{\ln 5} 5^{-x} + C\end{aligned}$$

**Zadatak** 9 Nađite integral: $\int \frac{ax+b}{cx+d} dx$, gdje $a, c \neq 0$.

*Rješenje:*

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{cx+d} dx &= \frac{a}{c} \int \frac{x + \frac{b}{a}}{x + \frac{d}{c}} dx = \frac{a}{c} \left[ \int \frac{x + \frac{d}{c} + \frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{x + \frac{d}{c}} dx \right] = \\ &= \frac{a}{c} \left[ x + \left( \frac{b}{a} - \frac{d}{c} \right) \ln \left| x + \frac{d}{c} \right| \right] + C\end{aligned}$$

**Zadatak** 10 Nađite integrale:

(a) $\int \tan x dx$

(b) $\int \cot x dx$

(c) $\int \tan^2 x dx$

(d) $\int \cot^2 x dx$

*Rješenje:*

(a) $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$

(c) $\int \tan^2 x dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C$

**Zadatak** 11 Nađite integrale:

(a) $\int \frac{4}{\sin^2(2x)} dx$

(b) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

(c) $\int \frac{dx}{\sin x}$

(d) $\int \frac{dx}{\cos x}$

*Rješenje:*

(a) $\int \frac{4}{\sin^2(2x)} dx = 2\int \frac{d(2x)}{\sin^2(2x)} = -2\cot(2x) + C$

(b) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x - \cot x + C$

(c) $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

(d) $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \ldots = -\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| + C$

**Zadatak** 12 Nađite integrale:

(a) $\int x\sqrt{2-5x}dx$

(b) $\int x\sqrt{2-5x^2}dx$

(c) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}} dx$

(d) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-3x^2}} dx$

*Rješenje:*

(a)

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{2-5x}dx &= \int -\frac{1}{5}(2-5x-2)\sqrt{2-5x}dx = -\frac{1}{5}\int (2-5x)^{\frac{3}{2}}dx + \frac{2}{5}\int \sqrt{2-5x}dx \\
&= \frac{1}{25}\int (2-5x)^{\frac{3}{2}}d(2-5x) - \frac{2}{25}\int (2-5x)^{\frac{1}{2}}d(2-5x) = \\
&= \frac{2}{125}(2-5x)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{75}(2-5x)^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}$$

**Zadatak** 13 Nađite integrale:

(a) $\int e^{3\cos x}\sin x dx$

(b) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\int \frac{2^{\arctan x}}{1+x^2} dx$

*Rješenje:*

(a) $\int e^{3\cos x}\sin x dx = -\frac{1}{3}\int e^{3\cos x} d(3\cos x) = -\frac{1}{3}e^{3\cos x} + C$

**Zadatak** 14 Nađite integrale:

(a) $\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$

(b) $\frac{dx}{3^x + 2}$

*Rješenje:*

(b)

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3^x+2} &= \frac{1}{2}\int \frac{3^x + 2 - 3^x}{3^x+2}dx = \frac{1}{2}\left[\int dx - \frac{1}{\ln 3}\int \frac{d(3^x+2)}{3^x+2}\right] \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{\ln 3}\ln(3^x+2) + C
\end{aligned}$$

**Zadatak** 15 Nađite integrale:

(a) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$ (b) $\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx$

*Rješenje:*

(a) $\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx = \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} = \dots$

**Zadatak** 16 Riješite integral: $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$.

*Rješenje:*

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} &= \int \frac{dx}{\cos^2 x (b^2 + a^2 \tan^2 x)} = \int \frac{d(\tan x)}{b^2 + a^2 \tan^2 x} = \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{d(\tan x)}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \tan^2 x} = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a}{b} \tan x\right) + C\end{aligned}$$

**Zadatak** 17 Riješite integral: $\int \frac{\cos(\alpha x)}{A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)} dx, \quad A^2 + B^2 \neq 0.$

*Rješenje:* Ovo je malo teži zadatak. Prvo koristimo jednakost

$$\begin{aligned}A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x) &= \sqrt{A^2 + B^2} \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(\alpha x) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(\alpha x) \right) = \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\alpha x - \phi)\end{aligned}$$

(jednakost $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 1$ povlači da postoji jedinstveni $\phi \in [0, 2\pi)$ takav da $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos \phi$ i $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin \phi$.)

Sada imamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(\alpha x)}{A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)} dx &= \int \frac{\cos(\alpha x - \phi + \phi)}{\sqrt{A^2 + B^2} \cos(\alpha x - \phi)} dx \\ &= \int \frac{\cos(\alpha x - \phi) \cos \phi - \sin(\alpha x - \phi) \sin \phi}{\sqrt{A^2 + B^2} \cos(\alpha x - \phi)} dx = \\ &= \int \frac{\cos \phi}{\sqrt{A^2 + B^2}} dx - \frac{\sin \phi}{\sqrt{A^2 + B^2}} \int \tan(\alpha x - \phi) dx = \dots\end{aligned}$$

### 1.1.1 Metoda supstitucije

Ponekad možemo olakšati integriranje ako danu varijablu zamijenimo nekom prikladnijom prema slijedećem pravilu:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \phi(t) + C \quad \Rightarrow \quad \int f(x) dx = \phi(\varphi^{-1}(x)) + C$$

Primjetimo da smo metodu supstitucije već indirektno koristili u nekim prijašnjim zadacima.

**Zadatak** 1 Prigodnom supstitucijom riješite sljedeće integrale:

(a) $\int x\sqrt{1+3x^2}dx$

(b) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

(c) $\int x^2 3^{x^3} dx$

*Rješenje:*

(a)

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+3x^2}dx &= \left|\ t=1+3x^2 \Rightarrow dt = 6xdx\ \right| = \frac{1}{6}\int \sqrt{t}dt = \frac{1}{6}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \\ &= \frac{1}{9}(1+3x^2)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

*Napomena:* Naša susptitucija ekvivalentna je donjem postupku koji smo koristili u prijašnjim zadacima:

$$\int x\sqrt{1+3x^2}dx = \int \sqrt{1+3x^2}\frac{1}{6}d(1+3x^2) = \dots$$

(b)

$$\begin{aligned}\int x^2 3^{x^3} dx &= \left|\ t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2dx\ \right| = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + C = \\ &= \frac{1}{3}e^{x^3} + C\end{aligned}$$

**Zadatak** 2 Prigodnom supstitucijom riješite sljedeće integrale:

(a) $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x\sqrt{1-x^2}}$

(b) $\int \frac{2^{\arctan x}}{1+x^2}dx$

*Rješenje:*

(a)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\arcsin^2 x\sqrt{1-x^2}} &= \left|\ t = \arcsin x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ \right| = \int \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{t} + C = \\ &= \frac{1}{\arcsin x} + C\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \frac{2^{\arctan x}}{1+x^2}dx &= \left|\ t = \arctan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{1+x^2}\ \right| = \int 2^t dt \\ &= \frac{1}{\ln 2}2^t + C = \frac{1}{\ln 2}2^{\arctan x} + C\end{aligned}$$

**Zadatak** 3 Odredite sljedeće neodređene integrale:

(a) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2\sin^2 x+\cos^2 x}}dx$

(b) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2\sin^2 x+\cos^2 x}}dx$

(c) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin^2 x+\cos^2 x}}dx$

*Rješenje:*

(a)

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2\sin^2 x+\cos^2 x}}dx &= \int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} = \left|\ t=\sin^2 x \Rightarrow dt = 2\sin x\cos x\right| = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1+t}+C = \sqrt{1+\sin^2 x}+C\end{aligned}$$

(b) i (c) sami

**Zadatak** 4 Odredite sljedeći integral uz upotrebu navedene supstitucije:

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$, supstitucija $x=t^2$

(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$, supstitucija $x=\sin^2 t$

*Rješenje:*

(a)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} &= \left|\ x=t^2 \Rightarrow t=\sqrt{x} \text{ i } dx = 2tdt\ \right| = \int \frac{2t}{\sqrt{t^2(1-t^2)}}dt = \\ &= 2\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\arcsin t + C = 2\arcsin\sqrt{x}+C\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} &= \left|\ x=\sin^2 t \Rightarrow t=\arcsin\sqrt{x} \text{ i } dx = 2\sin t\cos tdt\ \right| = \int \frac{2\sin t\cos t}{\sin t\cos t}dt = \\ &= 2\int dt = 2t + C = 2\arcsin\sqrt{x}+C\end{aligned}$$

**Zadatak** 5 Odredite sljedeće neodređene integrale:

(a) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$ (b) $\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x}dx$

*Rješenje:*

(a)

$$\begin{aligned}\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx &= \left|\ x=t^2 \Rightarrow dx = 2tdt\ \right| = \int \frac{1+t^2}{1+t}2tdt = 2\int \frac{t^3+t}{t+1}dt \\ &= 2\int (t^2-t+2-\frac{2}{1+t})dt = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 4t - 4\ln(1+t) + C = \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln(1+\sqrt{x}) + C\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x}dx &= \int \frac{\ln 2+\ln x}{x(\ln 4+\ln x)}dx = \left|\ \ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt\ \right| = \int \frac{\ln 2 + t}{\ln 4 + t}dt = \\ &= \int \frac{\ln 4 + t - \ln 2}{\ln 4 + t}dt = \int \left(1 - \frac{\ln 2}{\ln 4 + t}\right)dt = \\ &= t - \ln 2\cdot \ln|\ln 4 + t| + C = \ln x - \ln 2 \cdot \ln|\ln 4 + \ln x| + C\end{aligned}$$

**Zadatak** 6 Odredite sljedeći integral uz upotrebu navedene supstitucije:

(a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, supstitucija $x = \frac{1}{t}$

(b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, supstitucija $x = \tan t$

**Trigonometrijske supstitucije:** Neka je $a > 0$.

1) Ako integral sadrži radikal $\sqrt{a^2 - x^2}$, onda obično stavljamo $x = a \sin t$ i dobivamo
$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t.$$

2) Ako integral sadrži radikal $\sqrt{x^2 - a^2}$, stavljamo $x = \frac{a}{\cos t}$ i dobivamo
$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan t.$$

3) Ako integral sadrži radikal $\sqrt{a^2 + x^2}$, stavljamo $x = a \tan t$ i dobivamo
$$\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t}.$$

**Zadatak** 7 Primjenom trigonometrijskih supstitucija izračunajte:

(a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(b) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$

(c) $\int \sqrt{1-x^2} dx$

(d) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

*Rješenje:*

(a)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \left| \, x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt \, \right| = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cos t dt = \int \sin^2 t dt = \\
&= \int \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \int dt - \frac{1}{2} \int \cos 2t dt = \\
&= \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin 2t + C = \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx &= \left| \, x = \tan t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \, \right| = \int \frac{1}{\cos t} \frac{1}{\tan t} \frac{dt}{\cos^2 t} = \\
&= \int \frac{dt}{\cos^2 t \sin t} = \int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t \sin t} dt = \int \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt + \int \frac{dt}{\sin t} = \\
&= \frac{1}{\cos t} + \int \frac{dt}{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} = \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{2} \int \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2}} dt = \\
&= \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\tan \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2}} = \frac{1}{\cos t} + \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| + C = \\
&= \sqrt{x^2+1} + \ln \left| \frac{-1 \pm \sqrt{1+\tan^2 t}}{\tan t} \right| + C = \\
&= \sqrt{x^2+1} + \ln \left| \frac{-1 \pm \sqrt{1+x^2}}{x} \right| + C
\end{aligned}$$

### 1.1.2 Parcijalna integracija

Neka su $u$ i $v$ neprekidno derivabilne funkcije (svojstvo neprekidnosti nećemo ovdje pobliže objašnjavati, ono za nas znači da je funkcija "dovoljno lijepa" da se sa njom može raditi parcijalna integracija). Onda je

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

**Primjer** 1 Primjenom formule za parcijalnu integraciju izračunajte

$$\int e^x \sin x dx.$$

*Rješenje:* Imamo

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin x dx &= -\left(\int e^x(-\sin x) dx\right) = \begin{vmatrix} u = e^x & dv = -\sin x \\ du = e^x dx & v = \cos x dx \end{vmatrix} = \\
&= -\left(e^x \cos x - \int \cos x e^x dx\right) = \begin{vmatrix} u = e^x & dv = \cos x \\ du = e^x dx & v = \sin x dx \end{vmatrix} = \\
&= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.
\end{aligned}$$

Sada primjetimo da se integral od kojeg smo krenuli pojavio sa desne strane ali sa suprotnim predznakom. Prebacimo ga na lijevu stranu i dobivamo:

$$\begin{aligned}
2\int e^x \sin x dx &= e^x \sin x - e^x \cos x \\
\Rightarrow \int e^x \sin x dx &= \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C
\end{aligned}$$

**Zadatak** 2 Parcijalnom integracijom riješite:

(a) $\int x \sin x dx$

(b) $\int x \cos x dx$

(c) $\int x^2 e^x dx$

(d) $\int x \ln x dx$

*Rješenje:*

(a)

$$\begin{aligned}
\int x \sin x dx &= -\left(\int x(-\sin x) dx\right) = \begin{vmatrix} u = x & dv = -\sin x \\ du = dx & v = \cos x dx \end{vmatrix} = \\
&= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int x^2e^xdx &= \left| \begin{array}{ll} u=x^2 & dv=e^xdx \\ du=2xdx & v=e^x \end{array} \right| = x^2e^x - \int 2xe^xdx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u=2x & dv=e^xdx \\ du=2dx & v=e^x \end{array} \right| = x^2e^x - 2xe^x + \int 2e^xdx = x^2e^x-2xe^x+2e^x+C\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int x\ln xdx &= \left| \begin{array}{ll} u=\ln x & dv=xdx \\ du=\frac{dx}{x} & v=\frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2\ln x}{2} - \int x^2\frac{1}{x}dx = \\ &= \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C\end{aligned}$$

**Zadatak** 3 Riješite parcijalnom integracijom:

(a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$ (b) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$

*Rješenje:*

(a)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx &= \left| \begin{array}{ll} u=x & dv=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}dx} \\ du=dx & v=\sqrt{1+x^2} \end{array} \right| = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}dx = \\ &= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx\end{aligned}$$

Primjetimo da se početni integral pojavio sa desne strane i to sa suprotnim predznakom; prebacujemo ga na lijevi stranu i dobivamo:

$$\begin{aligned}2\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx &= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \Rightarrow \\ \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx &= \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} - \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2} + C\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx &= \left| \begin{array}{ll} u=x & dv=\frac{x}{(1+x^2)^2dx} \\ du=dx & v=-\frac{1}{2(1+x^2)} \end{array} \right| = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \int \frac{dx}{2(1+x^2)}dx = \\ &= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + C\end{aligned}$$

**Zadatak** 4 Riješite:

(a) $\int \frac{x^2-2x+5}{e^x}dx$ (b) $\int (x^3+1)\cos 2xdx$

**Zadatak** 5 Primjenom parcijalne integracije riješite:

(a) $\int \arcsin x dx$

(b) $\int x^2 \arctan x dx$

(c) $\int \sqrt{a^2+x^2}dx, \quad a \neq 0$

*Rješenje:*

(a)

$$\begin{aligned}
\int \arcsin x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin x & dv = dx \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \end{array} \right| = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\
&= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int x^2 \arctan x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \arctan x & dv = x^2 dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \\
&= \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x^2}{1+x^2} \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{6} \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} d(x^2) = \\
&= \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{6} \left( \int d(x^2) - \int \frac{d(x^2)}{1+x^2} \right) = \\
&= \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{6} (x^2 - \ln(1+x^2)) + C
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2+x^2} &= \int \frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}} dx + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \quad \text{vidi Zadatak 3 (b)} \quad = \\
&= a^2 \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C = \\
&= \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2+x^2} + C
\end{aligned}$$

### 1.1.3 Integrali sa kvadratnim trinomom

Neke tipove integrala sa kvadratnim trinomima možemo pojednostavniti određenim transformacijama.

1) Integrali oblika:

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$$

Svodimo kvadratni trinom na slijedeći oblik:

$$ax^2+bx+c = a(x+k)^2 + l,$$

gdje su $k$ i $l$ neke konstante. Ako je $m=0$, onda gornjim postupkom dobivamo tablični integral. Ako je $m \neq 0$, onda iz brojnika odvojimo $2ax+b$ i dolazimo do prethodnog slučaja.

**Primjer** 1 Izračunajte integral: $\int \frac{dx}{x^2+2x+5} dx$.

*Rješenje:* Odjeljivanjem punog kvadrata iz kvdratnog trinoma dobivamo:

$$x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 - 1 + 5 = (x+1)^2 + 4.$$

Sada imamo:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} \quad = \quad \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C.$$

**Primjer** 2 Izračunajte integral: $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5} dx$.

*Rješenje:* Ovdje je očito $m = 3 \neq 0$. Svodimo trinom na puni kvadrat:

$$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 - 4 + 5 = (x-2)^2 + 1.$$

Jer $2ax + b = 2x - 4$, dalje imamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-2}{x^2-4x+5} dx &= \int \frac{3x-2}{(x-2)^2+1} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)+4}{(x-2)^2+1} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x-4}{(x-2)^2+1} dx + 4 \int \frac{dx}{(x-2)^2+1} dx = \\ &= \frac{3}{2} \ln((x-2)^2+1) + 4 \arctan(x-2) + C \end{aligned}$$

2) Integrali oblika:

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

rješavaju se analogno gornjima.

**Primjer** 3 Izračunajte integral: $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}$.

*Rješenje:* Ovdje imamo:

$$1 - x - x^2 = 1 - (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} - (x + \frac{1}{2})^2,$$

te $2ax + b = -2x - 1$ pa dobivamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} &= \int \frac{2x-8}{\sqrt{\frac{5}{4} - (x+\frac{1}{2})^2}} dx = \int \frac{-(-2x-1)-9}{\sqrt{\frac{5}{4} - (x+\frac{1}{2})^2}} dx = \\ &= -\int \frac{-2x-1}{\sqrt{\frac{5}{4} - (x+\frac{1}{2})^2}} dx - \int \frac{9}{\sqrt{\frac{5}{4} - (x+\frac{1}{2})^2}} dx = \\ &= -2\sqrt{\frac{5}{4} - (x+\frac{1}{2})^2} - 9 \arcsin \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} + C = \\ &= -2\sqrt{\frac{5}{4} - (x+\frac{1}{2})^2} - 9 \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C \end{aligned}$$

(3) Integrali oblika:

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\; dx$$

rješavaju se tako da odvojimo puni kvadrat i zatim svedemo integral na jedan od donja dva osnovna oblika:

i) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C; \quad a>0$

ii) $\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

(vidi zadatak 5 (c), str. 11, prvi integral može se analogno riješiti.)

**Primjer** 4 Izračunajte integral: $\int \sqrt{x^2+2x+5}dx$.

*Rješenje:*

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+2x+5}dx &= \int \sqrt{(x+1)^2+4}dx = \quad \text{to je slučaj ii)} \quad = \\ &= \frac{x+1}{2}\sqrt{(x+1)^2+4} + 2\ln(x+1+\sqrt{(x+1)^2+4}) + C\end{aligned}$$

**Zadatak** 5 Riješite sljedeće integrale:

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$

(b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\int \frac{x}{x^4-4x^2+3}dx$

(d) $\frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 12}dx$

*Rješenje:*

(a)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4}+q}} = \ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q}\right| + C = \\ &= \ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right| + C\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} &= \left|\; x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt \;\right| = \int \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}dt = -\int \frac{dt}{t\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}} = \\ &= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = -\ln|t+\sqrt{t^2-1}| + C = -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| \\ &= \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^4-4x^2+3}dx &= \left|t=x^2 \to dt = 2xdx\right| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-4t+3} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t-2)^2-1} = \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2-1}{t-2+1}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-3}{t-1}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2-1}\right| + C\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 12}dx &= |t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx| = \int \frac{dt}{t^2 - 6t + 12} = \int \frac{dt}{(t-3)^2 + 3} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t-3}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\sin x - 3}{\sqrt{3}} + C\end{aligned}$$

### 1.1.4 Integriranje racionalnih funkcija

Za integriranje racionalnih funkcija najčešće koristimo metodu neodređenih koeficijenata i metodu Ostrogradskog.

**Metoda neodređenih koeficijenata:** Nakon odvajanja cijelog dijela, integriranje racionalne funkcije svodimo na integriranje pravog racionalnog razlomka:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

gdje su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi takvi da je stupanj polinoma $P(x)$ manji od stupnja polinoma $Q(x)$. Ako je

$$Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_n)^{\alpha_n}$$

gdje su $x_1, \dots, x_n$ različiti realni korijeni polinom $Q(x)$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ prirodni brojevi, onda gornji razlomak možemo rastaviti na parcijalne razlomke:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \dots \\ &\dots + \frac{A_{n1}}{x - x_n} + \frac{A_{n2}}{(x - x_n)^2} + \dots + \frac{A_{n\alpha_n}}{(x - x_n)^{\alpha_n}}.\end{aligned}$$

Neodređene koeficijente $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{n\alpha_n}$ nalazimo tako da gornji identitet svedemo na cijeli oblik pa izjednačimo koeficijente s istim stupnjem varijable $x$ ili tako da za $x$ u tu istu jednadžbu uvrstimo prikladne brojeve.

**Primjer 1** Izračunajte integral $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$

*Rješenje:* U zadanom integralu prvo odvajamo cijeli dio:

$$\frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x^2 - 5x + 6 + 3}{x^2 - 5x + 6} = 1 + \frac{3}{x^2 - 5x + 6}$$

pa imamo

$$\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6}dx = \int dx + \int \frac{3}{x^2 - 5x + 6}dx = x + 3\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$$

Sada je u brojniku $P(x) = 1$ što je nižeg stupnja nego $Q(x) = x^2 - 5x + 6$ u nazivniku. Vrijedi:

$$Q(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2).$$

Stoga rastavljamo naš razlomak na sljedeće parcijalne razlomke:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2}.$$

Tražimo keoficijente $A$ i $B$.

*Prvi način:* svodimo naš identitet na cijeli oblik i izjednačujemo koeficijente s istim stupnjem varijable $x$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-5x+6} &= \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2} \quad \Big/ (x-3)(x-2) \quad \Rightarrow \\ 1 &= A(x-2)+B(x-3) \quad \Rightarrow \\ 1 &= (A+B)x-2A-3B \\ \text{iz čega slijedi} & \quad A+B=0 \quad \text{i} \quad -2A-3B=1 \quad \Rightarrow \\ & \quad A=1 \quad \text{i} \quad B=-1 \end{aligned}$$

*Drugin način:* nalazimo $A$ i $B$ tako da uvrstimo zgodne vrijednosti za $x$ u jednadžbi $1=A(x-2)+B(x-3)$, npr.

$$\begin{aligned} x &= 2 \quad \Rightarrow \quad 1=-B \quad \Rightarrow B=-1 \\ x &= 3 \quad \Rightarrow \quad 1=A \quad \Rightarrow A=1 \end{aligned}$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx &= x+3\int \frac{dx}{x^2-5x+6} = x+3\int \left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)dx = \\ &= x+3\ln|x-3|-3\ln|x-2|+C = x+3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C. \end{aligned}$$

**Primjer** 2 Nađite integral: $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$.

*Rješenje:* Direktnim uvrštavanjem provjerimo da 3 i $-1$ nisu nule polinoma u brojniku pa je, prema tome, razlomak skraćen do kraja. Rastavljamo ga na parcijalne razlomke:

$$\begin{aligned} \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} &= \frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2} \quad \Rightarrow \\ 5x^2+6x+9 &= A(x-3)(x+1)^2+B(x+1)^2+C(x-3)^2(x+1)+D(x-3)^2 \end{aligned}$$

Uvrštavamo pogodne vrijednosti za $x$:

$$\begin{aligned} x=3 \quad \Rightarrow \quad &= \quad 5\cdot 9+6\cdot 3+9=B\cdot 16 \quad \Rightarrow \quad B=\frac{72}{16}=\frac{9}{2} \\ x=-1 \quad \Rightarrow \quad &= \quad 5-6+9=D\cdot 16 \quad \Rightarrow \quad D=\frac{8}{16}=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sada vratimo dobivene vrijednosti u početnu jednadžbu i imamo:

$$2(5x^2+6x+9)=A(x-3)(x+1)^2+9(x+1)^2+C(x-3)^2(x+1)+(x-3)^2.$$

To dalje računamo i izjednačavamo koeficijente uz potencije od $x$:

$$\begin{aligned} 10x^2+12x+18 &= A(x-3)(x^2+2x+1)+9(x^2+2x+1)^2+ \\ &\quad +C(x^2-6x+9)(x+1)+(x^2-6x+9)= \\ &= A(x^3-x^2-5x-3)+9(x^2+2x+1)+C(x^3-5x^2+3x+9)+(x^2-6x+9) \\ \text{koeficijenti uz} \quad x^3 &: \quad A+C=0 \\ \text{slobodni koeficijenti} &: \quad -3A+9+9C+9=18 \quad \Rightarrow \quad -3A+9C=0 \\ \Rightarrow & \quad A=0 \quad \text{i} \quad C=0. \end{aligned}$$

Stoga slijedi:

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx &= \int \left( \frac{9}{2(x-3)^2} + \frac{1}{2(x+1)^2} \right) dx = \\ &= -\frac{9}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x+1)} + C\end{aligned}$$

(ovdje je $C$ u zadnjem redu kao i obično oznaka za konstantu, te nema veze za $C$ iz rastava na parcijalne razlomke).

**Metoda Ostrogradskog:** Ako polinom $Q(x)$ ima višestruke korijene, onda je

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{R(x)}{Q_1(x)}dx + \int \frac{S(x)}{Q_2(x)}dx$$

gdje je $Q_1(x)$ najveća zajednička mjera polinoma $Q(x)$ i njegove derivacije $Q'(x)$ a $Q_2(x) = Q(x) : Q_1(x)$. $R(x)$ i $S(x)$ su polinomi sa neodređenim koeficijentima čije je stupanj za jedan manji od stupnja $Q_1(x)$ i $Q_2(x)$. Njihove koeficijente računamo derivirajući gornji identitet.

**Primjer 3** Nađite integral: $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$.

*Rješenje:* Kako je $Q(x) = (x^4-1)^2$, imamo $Q'(x) = 2(x^4-1)\cdot 4x^3$. Stoga je $Q_1(x) = x^4-1$ i $Q_2(x) = x^4-1$. Sada je

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^2} = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4-1} + \int \frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4-1}dx.$$

Deriviramo taj identitet i dobivamo:

$$\frac{1}{(x^4-1)^2} = \frac{(3Ax^2+2Bx+C)(x^4-1)-(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\cdot 4x^3}{(x^4-1)^2} + \frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4-1}.$$

Svodimo dobiveni identitet na cijeli oblik:

$$\begin{aligned}1 &= (3Ax^2+2Bx+C)(x^4-1)-(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\cdot 4x^3+(Ex^3+Fx^2+Gx+H)(x^4-1) = \\ &= Ex^7+(F-A)x^6+(G-2B)x^5+(H-3C)x^4+(-4D-E)x^3+ \\ &\quad (-3A-F)x^2+(-G-2B)x-H-C\end{aligned}$$

i izjednačavanjem koeficijenata odmah slijedi

$$A=B=D=E=F=G=0 \quad \text{i} \quad C=-\frac{1}{4},\ H=-\frac{3}{4}.$$

Sada imamo:

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^2} = -\frac{x}{4(x^4-1)} - \int \frac{3}{4(x^4-1)}dx$$

Ostaje riješiti integral $\int \frac{1}{(x^4-1)}dx$ što možemo rastavom na parcijalne razlomke.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4-1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \quad \text{pa cijeli oblik izgleda} \\ 1 &= A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)(x+1)\end{aligned}$$

Uvrštavamo $x = 1$ i $x = -1$ pa redom dobivamo:

$$1 = 4A, \quad 1 = -4B \quad \Rightarrow A = \frac{1}{4}, \ B = -\frac{1}{4}$$

Kada to uvrstimo u jednadžbu, izlazi:

$$4 = (x+1)(x^2+1) - (x-1)(x^2+1) + 4(Cx+D)(x-1)(x+1)$$

pa za, npr. $x = 2$ i $x = 3$, izlazi:

$$\begin{aligned} 4 &= 3 \cdot 5 - 5 + 12 \cdot (2C + D) \quad \Rightarrow 2C + D = -2 \\ 4 &= 4 \cdot 10 - 2 \cdot 10 + 4(3C + D)2 \cdot 4 \quad \Rightarrow 3C + D = -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow & \quad C = 0 \quad \text{i} \quad D = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Riješavamo integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4 - 1} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \\ &= \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \arctan x \end{aligned}$$

Sve skupa dobivamo:

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^2} = -\frac{x}{4(x^4-1)} - \frac{3}{16} \ln|x-1| - \frac{3}{16} \ln|x+1| - \frac{3}{8} \arctan x.$$

**Zadatak** 4 Riješite sljedeće integrale:

(a) $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)} dx$ (b) $\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2} dx$

*Rješenje:*

(a) Brojnik je istog stupnja kao i nazivnik pa prvo dijelimo polinome:

$$\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)} = \frac{x^3+x+1}{x^3+x} = 1 + \frac{1}{x^3+x}$$

Sada imamo:

$$\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)} = \int dx + \int \frac{dx}{x^3+x}.$$

Rastavljamo razlomak u drugom integralu na parcijalne razlomke:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3+x} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \quad \Rightarrow \\ 1 &= A(x^2+1) + (Bx+C)x \quad \Rightarrow \\ & A + B = 0, \quad C = 0, \quad A = 1 \quad \text{pa} \quad B = -1 \end{aligned}$$

Slijedi:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)} dx &= \int dx + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1} dx = \\ &= x + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C \end{aligned}$$

(b) Nazivnik je istog stupnja kao i brojnik pa prvo dijelimo:

$$\frac{x^4-4x^3+10x^2-8x+2}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{(x^2-2x+2)^2+2x^2-2}{(x^2-2x+2)^2}=1+\frac{2x^2-2}{(x^2-2x+2)^2}$$

pa se naš integral svodi na:

$$\int\frac{x^4-4x^3+10x^2-8x+2}{(x^2-2x+2)^2}dx=\int dx+2\int\frac{x^2-1}{(x^2-2x+2)^2}dx$$

Drugi integral riješavamo metodom Ostrogradskog. Derivacija od nazivnika je $Q'(x)=2(x^2-2x+2)\cdot(2x-2)$ pa imamo

$$\int\frac{x^2-1}{(x^2-2x+2)^2}dx=\frac{Ax+B}{x^2-2x+2}+\int\frac{Cx+D}{x^2-2x+2}dx.$$

Deriviramo tu jednakost i dobivamo

$$\frac{x^2-1}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{A(x^2-2x+2)-(Ax+B)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+2}dx \quad\Rightarrow$$

$$x^2-1=A(x^2-2x+2)-(Ax+B)(2x-2)+(Cx+D)(x^2-2x+2)$$

$$\text{odakle slijedi}\quad C=0\quad\text{i}\quad B=A=-\frac{1}{2},\quad D=\frac{1}{2}$$

To dalje daje:

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2-1}{(x^2-2x+2)^2}dx &= -\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2-2x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-2x+2}=\\ &= -\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2-2x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2+1}=\\ &= -\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2-2x+2}+\frac{1}{2}\arctan(x-1)+C\end{aligned}$$

Sve skupa:

$$\int\frac{x^4-4x^3+10x^2-8x+2}{(x^2-2x+2)^2}dx=x-\frac{x+1}{x^2-2x+2}+\arctan(x-1)+C$$

### 1.1.5 Integriranje trigonometrijskih funkcija

1) Integrali oblika:

$$\int\sin^m x\cos^n x dx$$

gdje su $m$ i $n$ cijeli brojevi. Ako je $m=2k+1$ neparan pozitivan broj, onda stavljamo

$$\int\sin^m x\cos^n x dx \;=\; -\int\sin^{2k}x\cos^n x(d\cos x)=-\int(1-\cos^2 x)^k\cos^n xd(\cos x).$$

Analogno postupamo ako je $n$ neparan pozitivan broj.

**Primjer 1** Riješite integral: $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

*Rješenje:* Ovdje je eksponent od $\cos x$ neparna pa imamo:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^3 x dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x (1-\sin^2 x) d(\sin x) = \\ &= \int \sin^2 x d(\sin x) - \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C\end{aligned}$$

**Primjer 2** Izračunajte integral: $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx$.

*Rješenje:* Kako je eksponent od $\cos x$ neparan prirodni broj, imamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx &= \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} \cos x dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^3 x} d(\sin x) = \\ &= \int \frac{1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x}{\sin^3 x} d(\sin x) = \int \frac{1}{\sin^3 x} d(\sin x) - 2\int \frac{1}{\sin x} d(\sin x) + \int \sin x d(\sin x) = \\ &= -\frac{1}{2\sin^2 x} - 2\ln|\sin x| + \frac{1}{2}\sin^2 x + C\end{aligned}$$

Ako su i $m$ i $n$ pozitivni parni brojevi, onda podintegralni izraz transformiramo pomo ću formula:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

**Primjer 3** Riješite integral: $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

*Rješenje:* Koristimo gornje formule pa slijedi

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \int \frac{1-\cos 2x}{2} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x) dx = \\ &= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C = \\ &= \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C\end{aligned}$$

Ako su $m = -\mu$ i $n = -\nu$ cijeli negativni brojevi iste parnosti, tada imamo:

$$\begin{aligned}\int \sin^m x \cos^n x dx &= \int \frac{dx}{\sin^\mu x \cos^\nu x} = \int \frac{d(\tan x)}{\sin^\mu x \cos^{\nu-2} x} = \\ &= \int \left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \left(1 + \tan^2 x\right)^{\frac{\nu-2}{2}} d(\tan x) = \\ &= \int \frac{(1+\tan^2 x)^{\frac{\mu+\nu}{2}-1}}{\tan^\mu x} d(\tan x)\end{aligned}$$

To je, u biti, spustitucija $t = \tan x$.

Tako se, specijalno, mogu riješiti i integrali:

$$\int \frac{dx}{\sin^\mu x} = \frac{1}{2^{\mu-1}} \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^\mu \frac{x}{2} \cos^\mu \frac{x}{2}}, \quad \int \frac{dx}{\cos^\nu x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^\nu \left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

**Primjer** 4 Izračunajte integral: $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x}$.

*Rješenje:* Imamo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x} &= \int \frac{dx}{\sin^5 x \cos x \cos^2 x} = \int \frac{d(\tan x)}{\sin^5 x \cos x} = \\
&= \int \frac{d(\tan x)}{(\sin^2 x)^{\frac{5}{2}} (\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}} = \int \left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right)^{\frac{5}{2}} (1+\tan^2)^{\frac{1}{2}} d(\tan x) = \\
&= \int \frac{(1+\tan^2 x)^3}{\tan^5 x} d(\tan x) = \quad \text{stavimo } \tan x = t \text{ radi jednostavnosti} \quad = \\
&= \int \frac{(1+t^2)^3}{t^5} dt = \int \frac{1+3t^2+3t^4+t^6}{t^5} dt = \int \left(\frac{1}{t^5} + \frac{3}{t^3} + \frac{3}{t} + t\right) dt = \\
&= -\frac{1}{4t^4} - \frac{3}{2t^2} + 3\ln|t| + \frac{1}{2}t^2 + C = \\
&= -\frac{1}{4\tan^4 x} - \frac{3}{2\tan^2 x} + 3\ln|\tan x| + \frac{1}{2}\tan^2 x + C
\end{aligned}$$

**Primjer** 5 Nađite integral: $\frac{dx}{\sin^5 x}$.

*Rješenje:*

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin^5 x} &= \frac{1}{2^5} \int \frac{dx}{\sin^5 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2^5} \int \frac{dx}{\sin^5 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \\
&= \frac{1}{2^4} \int \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \frac{x}{2}}\right)^{\frac{5}{2}} (1+\tan^2 \frac{x}{2})^{\frac{3}{2}} d\left(\tan \frac{x}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{2^4} \int \frac{\left(1+\tan^2 \frac{x}{2}\right)^4}{\tan^5 \frac{x}{2}} d\left(\tan \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2^4} \int \frac{(1+t^2)^4}{t^5} dt = \\
&= \frac{1}{2^4} \int \frac{1+4t^2+6t^4+4t^6+t^8}{t^5} dt = \frac{1}{2^4} \left(-\frac{1}{4t^4} - \frac{2}{t^2} + 6\ln|t| + 2t^2 + \frac{1}{4}t^4\right) + C = \\
&= \frac{1}{2^4} \left(-\frac{1}{4\tan^4 \frac{x}{2}} - \frac{2}{\tan^2 \frac{x}{2}} + 6\ln|\tan \frac{x}{2}| + 2\tan^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\tan^4 \frac{x}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

Integrali oblika $\int \tan^m x dx$ ili $\int \cot^m x dx$ gdje je $m$ pozitivni cijeli broj računaju se pomoću formule:

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \quad \text{ili} \quad \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

**Primjer** 6 Izračunajte integral $\int \tan^2 5x dx$.

*Rješenje:*

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 5x dx &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 5x} - 1\right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 5x} - \int dx = \\
&= \frac{1}{5}\tan 5x - x + C
\end{aligned}$$

**Primjer** 7 Nađite integral $\int \cot^4 x dx$.

*Rješenje:*

$$\int \cot^4 x dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{\sin^4 x} - \frac{2}{\sin^2 x} + 1\right) dx$$

S drugom i trećom komponentom integrala nema problema, ostaje, dakle, prva:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^4 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx = \\ &= -\cot x - \int \cot^2 x d(\cot x) = \\ &= -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C\end{aligned}$$

Vraćamo to u prvi integral i dobivamo:

$$\begin{aligned}\int \cot^4 x dx &= -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + 2\cot x + x + C = \\ &= -\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + C\end{aligned}$$

Trigonometrijski integrali mogu se rješavati i drugim metodama osim navedenih, npr. supstitucijom i parcijalnom integracijom.

**Primjer** 8 Nađite integral: $\int x \sin^2 x^2 dx$.
*Rješenje:*

$$\begin{aligned}\int x \sin^2 x^2 dx &= \left| x^2 = t \Rightarrow \ 2x dx = dt \ \right| = \frac{1}{2}\int \sin^2 t dt = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{t}{4} - \frac{\sin 2t}{8} + C = \\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{\sin 2x^2}{8} + C\end{aligned}$$

**Primjer** 9 Izračunajte integral: $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}$.
*Rješenje:*

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{\tan x \cos^4 x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}\cos^2 x} = \\ &= \int \frac{d(\tan x)}{\sqrt{\tan x}} = 2\sqrt{\tan x} + C\end{aligned}$$

2) Integrali oblika:

$$\int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx, \quad \int \cos mx \cos nx dx$$

rješavaju se primjenom formula:

(a) $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$;

(b) $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$

(c) $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$

**Primjer** 10 Nađite integral: $\int \sin 3x \cos 5x dx$.

*Rješenje:* Koristimo prvu formulu pa imamo:

$$\begin{aligned}\int \sin 3x \cos 5x dx &= \frac{1}{2}\int(\sin 8x + \sin(-2x))dx = \frac{1}{2}\int \sin 8x dx - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = \\ &= -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + C\end{aligned}$$

**Primjer** 11 Riješite integral: $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b)dx, \quad a \neq 0.$

*Rješenje:* Koristimo treću formulu:

$$\begin{aligned}\int \cos(ax+b)\cos(ax-b)dx &= \frac{1}{2}\int(\cos 2b + \cos 2ax)dx = \frac{1}{2}\int \cos 2b dx + \frac{1}{2}\int \cos 2ax dx = \\ &= \frac{x\cos 2b}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + C\end{aligned}$$

3) Integrali oblika

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

gdje je $R$ racionalna funkcija s dvjema varijablama, rješavaju se pomoću supstitucije:

$$\tan\frac{x}{2} = t.$$

Onda je

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

**Primjer** 12 Riješite integral: $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

*Rješenje:* Primjenjujemo navedenu supstitciju:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{1+2t-t^2}dt = \\ &= 2\int \frac{dt}{2-(t-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+t-1}{\sqrt{2}-t+1}\right| + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{2}-\tan\frac{x}{2}+1}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right| + C\end{aligned}$$

**Primjer** 13 Nađite integral: $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx$.

*Rješenje:* Primjenjujemo gornju supstituciju:

$$\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx = \int \frac{\sin x - 1 + 1}{1-\sin x}dx = -\int dx + \int \frac{dx}{1-\sin x} =$$

$$
\begin{aligned}
&= -x + \int \frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = -x + 2\int \frac{dt}{1+t^2-2t} = \\
&= -x + 2\int \frac{dt}{(t-1)^2} = -x - \frac{2}{t-1} + C = \\
&= -x - \frac{2}{\tan\frac{x}{2} - 1} + C
\end{aligned}
$$

Ako vrijedi identitet:

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

onda možemo primjeniti supstituciju $\tan x = t$ gdje je

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

**Primjer** 14 Nađite $\int \frac{dx}{1+3\cos^2}$.

*Rješenje:* Tu očito vrijedi $R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$ pa imamo:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x} &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{3}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{3+t^2+1} = \\
&= \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\tan x}{2}\right) + C
\end{aligned}
$$

**Primjer** 15 Riješite integral: $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x\cos x}$.

*Rješenje:* Identitet vrijedi pa koristimo istu supstituciju:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x \cos x} &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} - 5\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2-5t}{1+t^2}} = \\
&= \int \frac{dt}{t^2-5t} = \int \frac{dt}{(t-\frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}} = \\
&= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{t-5}{t}\right| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\tan x - 5}{\tan x}\right| + C
\end{aligned}
$$

**Zadatak** 16 Riješite sljedeće integrale:

(a) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$ (b) $\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)}$

*Rješenje:*

(b) Rastavimo prvo podintegralni izraz na parcijalne razlomke:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(2-\sin x)(3-\sin x)} &= \frac{A}{2-\sin x} + \frac{B}{3-\sin x} \quad \Rightarrow \\
1 &= 3A - A\sin x + 2B - B\sin x \quad \Rightarrow \\
& A + B = 0 \quad \text{i} \quad 3A + 2B = 1 \quad \Rightarrow \quad A = 1,\ B = -1
\end{aligned}
$$

Sada imamo:

$$\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)} = \int \frac{dx}{2-\sin x} - \int \frac{dx}{3-\sin x}$$

I u jednom i u drugom integralu primjenjujemo supstituciju $\tan\frac{x}{2} = t$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2-\sin x} - \int \frac{dx}{3-\sin x} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{2-\frac{2t}{1+t^2}} - \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{3-\frac{2t}{1+t^2}} = \\
&= \int \frac{dt}{1+t^2-t} - 2\int \frac{dt}{3+3t^2-2t} = \\
&= \int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} - \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2-\frac{2}{3}t+1} = \\
&= \int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} - \frac{2}{3}\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}} = \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{3t-1}{2\sqrt{2}} + C = \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}-1}{2\sqrt{2}} + C
\end{aligned}
$$